ENS de Lyon — Algèbre 1
L3 — 2024-2025

TD 1 : Relations d'équivalence, quotients, premières propriétés des groupes

Les exercices marqués d'un  seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Exercices importants

Exercice 1.

1. Donner un isomorphisme $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$, où $\mathbb{S}^1$ est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est le groupe quotient de $\mathbb{R}$ par son sous-groupe distingué $\mathbb{Z}$.

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application.

2. **(a)** Montrer que la relation binaire sur E définie par $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence sur E.
   (b) On pose $X := E/\sim$. Soit $\pi : E \to X$ l'application canonique. Montrer qu'il existe une unique application $\overline{f} : X \to F$ telle que $f = \overline{f} \circ \pi$.
   (c) Montrer que $\overline{f}$ est une bijection sur son image.

Exercice 2. (Parties génératrices)

1. Soit X une partie non vide d'un groupe G. Montrer que $\langle X \rangle$ le sous-groupe de G engendré par X est exactement l'ensemble des produits finis de d'éléments de $X \cup X^{-1}$, avec $X^{-1} := \{x^{-1} \mid x \in X\}$.
2. Montrer que le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ n'admet pas de partie génératrice finie.
3. Montrer que $(\mathbb{Q}^\times, \times) = \langle -1, p \in \mathbb{P} \rangle$ où $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 3. (Ordre des éléments d'un groupe)
Soient g et h deux éléments d'un groupe G.

1. **(a)** Montrer que g est d'ordre fini si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^n = e$.
   (b) Montrer que si g est d'ordre fini, alors son ordre est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^n = e$. Montrer de plus que pour $m \in \mathbb{Z}$, $g^m = e$ si et seulement si l'ordre de g divise m.
2. Montrer que les éléments g, g^{-1}, et hgh^{-1} ont même ordre.
3. Montrer que gh et hg ont même ordre.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'ordre de g^n en fonction de celui de g.
5. On suppose que g et h commutent et sont d'ordre fini m et n respectivement.
   (a) Exprimer l'ordre de gh lorsque $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$.
   (b) Même question lorsque m et n sont premiers entre eux.

(c) (*Plus difficile*) On prend m et n quelconques. Soient $a = \min\{\ell \in \mathbb{N}^*, g^\ell \in \langle h \rangle\}$ et $b \in \mathbb{N}$ tel que $g^a = h^b$. Démontrer que l'ordre de gh est $\frac{an}{\operatorname{pgcd}(n,(a+b))}$.

6. En considérant $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que le produit de deux éléments d'ordre fini ne l'est pas forcément.

Exercice 4.

Soit G un groupe.

1. On suppose que tout élément g de G est d'ordre au plus 2. Montrer que G est commutatif.

2. Montrer que G est commutatif si et seulement si l'application $g \mapsto g^{-1}$ est un morphisme de groupe.

Exercice 5.

Soit $\phi : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes, et soit $g \in G_1$ d'ordre fini. Montrer que $\phi(g)$ est d'ordre fini et que son ordre divise l'ordre de g.

Exercice 6.

Soient G_1 et G_2 des groupes et $\phi : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes.

1. Soient H_1 (resp. H_2) un sous-groupe de G_1 (resp. G_2). Montrer que $\phi(H_1)$ (resp. $\phi^{-1}(H_2)$) est un sous-groupe de G_2 (resp. G_1).

2. Montrer que si H_2 est un sous-groupe distingué de G_2, alors $\phi^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe distingué de G_1.

3. Montrer que si ϕ est surjective, l'image d'un sous-groupe distingué de G_1 par ϕ est un sous-groupe distingué de G_2.

4. Donner un exemple d'un morphisme de groupes $\phi : G_1 \to G_2$ et de sous-groupe distingué $H_1 \lhd G_1$ tel que $\phi(H_1)$ n'est pas distingué dans G_2.

Exercice 7.

Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 8. (Classes à gauche et classes à droite)

Soit H un sous groupe d'un groupe G. Montrer que l'on a une bijection canonique $G/H \to H\backslash G$.

Exercice 9. (Normalisateur)

Soit $H \leqslant G$ un sous groupe d'un groupe G. On dit que $x \in G$ normalise H si $xHx^{-1} = H$. On note $\mathrm{N}_G(H)$ l'ensemble des éléments de G qui normalisent H. C'est le *normalisateur* de H dans G.

1. Montrer que $\mathrm{N}_G(H)$ est le plus grand sous groupe de G contenant H et dans lequel H est distingué.

2. En déduire que H est distingué dans G si et seulement si $G = \mathrm{N}_G(H)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 10. (Construction de $\mathbb{Q}$)

Soit $E = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. On définit $\sim$ sur E par $(a, b) \sim (a', b')$ si $ab' = a'b$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E. Si $(a, b) \in E$, on note $\frac{a}{b}$ son image dans $E/\sim$.

2. Munir $E/\sim$ d'une structure de corps telle que $\mathbb{Z}$ s'injecte dans $E/\sim$.

3. Similairement, pour un corps K construire $K(X)$ à partir de $K[X]$.

4. Construire $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$.

Exercice 11.

Soit $E = \mathbb{C}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'ensemble $(P) := \{QP,\ Q \in \mathbb{C}[X]\}$ est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

2. Déterminer un isomorphisme entre $\mathbb{C}[X]/(P)$ et le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_{d-1}[X]$ des polynômes de degré inférieur à $d-1$ de $\mathbb{C}[X]$.

3. Montrer que la multiplication dans $\mathbb{C}[X]$ induit une structure de $\mathbb{C}$-algèbre sur $\mathbb{C}[X]/(P)$.

Exercice 12.

Soit G un groupe et H un sous-groupe strict de G. Montrer que $\langle G \setminus H \rangle = G$.

Exercice 13.

Soit G un groupe fini. Montrer que G contient un élément d'ordre 2 si et seulement si son cardinal est pair. Montrer de plus que dans ce cas là il en contient un nombre impair.

Exercice 14.

Soit G un groupe et $\sim$ une relation d'équivalence sur G. On suppose que $G/\sim$ est un groupe et que la projection canonique $\pi : G \to G/\sim$ est un morphisme de groupe.

Montrer qu'il existe un sous-groupe distingué $H \lhd G$ tel que pour tout $x, y \in G$, $x \sim y$ si et seulement si $xy^{-1} \in H$.

Exercice 15.

Soit G un groupe, et S_G l'ensemble des sous-groupes de G.

1. Démontrer que si G est fini, alors S_G est fini.

2. Supposons que S_G est fini. Démontrer que tous les éléments de G sont d'ordre fini, et en déduire que G est fini.

3. On ne suppose plus que S_G est fini. Si tous les éléments de G sont d'ordre fini, est-ce que G est fini ?